TITLE:

有界超函数と周期線形函数方程式について (経路積分と超局所解析の入門)

AUTHOR(S):

岡田, 靖則

CITATION:

岡田, 靖則. 有界超函数と周期線形函数方程式について (経路積分と超局所解析の入門). 数理解析研究所講究録 2011, 1723: 179-190

ISSUE DATE:
2011-01

URL:
http://hdl.handle.net/2433/170442

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第1723巻 2011年 179-190

有界超函数と周期線形函数方程式について

岡田 靖則 (Yasunori OKADA)*

概要

佐藤超函数と，周期常微分方程式に関する古典的なMassera型定理を紹介し，報告者が有界超函数の概念を考えるに至った動機を説明する．また，[12]の結果について解説するとともに，最近の結果についての概略を報告する．

§1. Introduction

§1.1. 超函数とMasseraの定理

超函数 佐藤超函数(hyperfunction)の概念は1950年代終わりに佐藤幹夫先生によって導入され(佐藤[13],[14],[15]),解析的な微分方程式の研究で重要な役割を果たしてきた．以下では，超函数とは佐藤超函数を指すものとする．

超函数は，分布(distribution)などと同様に函数概念を拡張したものであり，ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$または実解析多様体上の脆弱層$\mathscr{B}$をなす．超函数は，局所的に複素の楔領域の定義正則函数の境界値の和として表され，また解析的係数の線形偏微分作用素$P \in \mathscr{D}$が作用する．その作用は定義正則函数への作用から自然に定まることが,応用上特に重要である．開集合$\Omega \subset \mathbb{R}^n$上の超函数の空間$\mathscr{B}(\Omega)$にはよい位相は入らないため，超函数の研究において直接位相的方法を用いることはできない．

解析的微分方程式の超函数解を研究するには，さらにマイクロ函数,擬微分作用素，量子化接触変換などの道具を用いることが多いが,ここではそれらの道具には触れず,参考文献として佐藤-河合-柏原[16],青木-片岡-山崎[1]を挙げるに留める．

2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 32A45; Secondary 34K13.
キーワード: bounded hyperfunctions, Massera type theorems.
Supported in part by JSPS Grant-in-Aid No. 22540173.
*千葉大学大学院理学研究科.

周期方程式の周期解 1950年，J. L. Massera [11] は，周期常微分方程式系の周期解の存在について研究し，例えば線形の場合には次の定理を与えた．

定理 1.1 (Massera, 線形の場合). $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\le i,j\le m}$, $f(t) = (f_j(t))_{1\le j\le m}$ は連続かつ 1-周期的とする．未知函数 $x(t) = (x_j(t))_{1\le j\le m}$ に関する常微分方程式系

$$\frac{d}{dt}x = A(t)x + f(t)$$

に未来方向に有界な解 ($t > t_0$ で定義された有界な解) があれば，1-周期的な解もある．

以下では，正定数 ω は周期を表すものとする．上の Massera の定理を一般化して，次の問題を考えよう．

問題. ω-周期的な線形函数方程式を考えるとき，未来方向の有界解があれば ω-周期解も存在すると言えるか?

いくつかの先行研究を挙げる．

Chow-Hale [3] は，遅れをもつ函数微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^r B(t,s)x(t-s)ds + f(t). \tag{1.1}$$

を考え，同様の結論を示した．ここで，$A, B, (f)$ は連続かつ (t 変数に関して) ω-周期的な，サイズ m の行列 (列ベクトル) 値函数で，$r > 0$ は定数である．

日野-村上 [6] は，似た方程式で，無限遅れを持つものを考えた．詳しくは，(1.1) において $r = \infty$ とし，$B(t,s)$ に関しては，t につき一様な可積分条件 "$\int_0^\infty |B(t,s)|ds$ が t につき連続" を課すものとする．

Zubelevich [17] は，Banach 空間の双対空間や Montel 性を持つ局所凸空間の離散力学系で同様の現象を研究した．

§1.2. 興味と動機

これらの研究を見て，報告者は，これは周期線形系に関する一般的な現象ではないかという印象を持った．そして，

問題. 超函数の枠組みでも，対応する現象はあるのだろうか?

という興味がわく．言い換えると，

問題. Massera 型定理が成り立つように，1 変数超函数に有界性の概念を導入できるだろうか?

というのは，1 変数超函数について Massera 型の定理を考えるためには，最低限

(無限遠点 $+\infty$ の近くでの) "有界性"

の概念を考える必要があるが，$+\infty$ の近くで定義された超函数に対する有界性の概念はない．もちろん，超函数には値や不等号がないので，"絶対値がある定数函数より小さい" というよう

な通常の有界性の概念をそのまま用いるわけにはいかない．さらに，いろいろと考えてはみたものの，$]0,+\infty[$ 上の超函数の空間 $\mathscr{B}(]0,+\infty[)$ に“$+\infty$ で有界な超函数”からなる部分空間を定めるのは，種々の事情から無理のように感じる．

そこで，“無限遠で有界な超函数”というものを作ってみることにした．

§2. 有界超函数

この節では，佐藤による1変数のフーリエ超函数の層 $\mathscr{Q}$ の構成と類似のやり方によって，“無限遠で有界な超函数の層”(略して，有界超函数の層) を定義し，またその性質を紹介する．

他方，2000年に Chung-Kim-Lee [4] により有界超函数の空間 $\mathcal{B}_{L^\infty}$ というのが導入されていたが，我々の層 (のスカラー版) の大域切断の空間は彼らの空間 $\mathcal{B}_{L^\infty}$ (の1次元版) と同一視できることにも触れる．

この点も考え，我々の層は $\mathscr{B}_{L^\infty}$ と記すことにした．

§2.1. 無限遠で有界な超函数

$\mathbb{R}$ の方向別コンパクト化 $\mathbb{D}^1$ 1次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ とその複素化 $\mathbb{C}$ をとり，$\mathbb{C}$ 上の1変数正則函数の層を $\mathscr{O}$ と書く．$\mathbb{R}$ 上の超函数の層 $\mathscr{B}$ は $\mathscr{O}$ を用いて定義された．しかし，我々は $\mathbb{R}$ の方向別コンパクト化 $\mathbb{D}^1=[-\infty,+\infty]=\mathbb{R}\sqcup\{\pm\infty\}$ を考え，我々の層を，$\mathbb{R}$ 上でなく，フーリエ超函数の層と同様に $\mathbb{D}^1$ 上に構成する．なお，$\mathbb{D}^1$ の位相は，付け加えた2点について，$+\infty$ の基本近傍系を $\{]a,+\infty]\}_{a\in\mathbb{R}}$，$-\infty$ の基本近傍系を $\{[-\infty,a[\}_{a\in\mathbb{R}}$ として定めておく．

$\mathbb{R}$ の座標として t，またその複素化 $\mathbb{C}=\mathbb{R}+i\mathbb{R}$ の座標として $w=t+is$ をとるが，図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{D}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}=\mathbb{R}+i\mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{D}^1+i\mathbb{R} \end{array}$$

により，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ の開部分集合とみなし，$\mathbb{D}^1$ および $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ の座標もそれぞれ t,w をそのまま用いる．例えば，$\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ における点 $+\infty$ の近傍は，$]a,+\infty]+i]-d,+d[=\{t+is\in\mathbb{D}^1+i\mathbb{R};t>a,|s|<d\}$ (ここで $a\in\mathbb{R},d>0$) という形の集合を含むことに注意する．また，局所閉集合 $\Omega\subset\mathbb{D}^1$ の複素近傍とは，$\Omega\overset{\text{closed}}{\subset}U\overset{\text{open}}{\subset}\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ をみたす U のことを言う．

有界正則函数の層 $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ 上に有界正則函数の層を定義する．

定義 2.1 (有界正則函数の層). $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ 上の有界正則函数の層 $\mathscr{O}_{L^\infty}$ を，次の対応

$$\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}\overset{\text{open}}{\supset}U\mapsto\mathscr{O}(U\cap\mathbb{C})\cap L^\infty(U\cap\mathbb{C}).$$

が与える前層に付随する層として定義する．

前層の段階では，U 上の切断は $U\cap\mathbb{C}$ 上で正則かつ有界な函数だが，$\mathscr{O}_{L^\infty}$ の U 上の切断の空間は次のようになる．

$$\mathscr{O}_{L^\infty}(U)=\{f\in\mathscr{O}(U\cap\mathbb{C});\forall K\Subset U,\|f\|_K:=\sup_{w\in K\cap\mathbb{C}}|f(w)|<+\infty\}.$$

つまり，U 上の切断は $U\cap\mathbb{C}$ 上の函数としては有界とは限らないが，例えば $+\infty+is_0\in U$ であれば，ある $a\in\mathbb{R},d>0$ が存在して，集合 $[a,+\infty[+i[s_0-d,s_0+d]$ の上では有界となる．

$\mathscr{O}_{L^\infty}(U)$ はセミノルム系 $\{\|\cdot\|_K\}_{K\Subset U}$ によって Fréchet 空間となり，また $\mathscr{O}_{L^\infty}|_{\mathbb{C}}=\mathscr{O}$ となる．

無限遠で有界な超函数の層　有界正則函数の層を用いて，$\mathbb{D}^1$ 上の無限遠で有界な超函数の層を定義する．

定義 2.2 (無限遠で有界な超函数の層)．$\mathbb{D}^1$ 上の無限遠で有界な超函数の層 $\mathscr{B}_{L^\infty}$ を次の対応

$$\mathbb{D}^1\overset{\text{open}}{\supset}\Omega\mapsto\varinjlim_{U}\frac{\mathscr{O}_{L^\infty}(U\setminus\Omega)}{\mathscr{O}_{L^\infty}(U)}.$$

が与える前層に付随する層として定義する．ここで，帰納極限における U は Ω の複素近傍をわたる．

なお，参考として，1-変数の超函数の層 $\mathscr{B}$ は次の対応

$$\mathbb{R}\overset{\text{open}}{\supset}\Omega\mapsto\varinjlim_{U}\frac{\mathscr{O}(U\setminus\Omega)}{\mathscr{O}(U)}$$

が与える前層に付随する層であり，1-変数のフーリエ超函数の層 $\mathscr{Q}$ は次の対応

$$\mathbb{D}^1\overset{\text{open}}{\supset}\Omega\mapsto\varinjlim_{U}\frac{\tilde{\mathscr{O}}(U\setminus\Omega)}{\tilde{\mathscr{O}}(U)}.$$

が与える前層に付随する層であったことを思い起こそう．ここで，$\tilde{\mathscr{O}}$ は $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ 上の，実方向に劣指数型増大の正則函数の層である．詳細は，佐藤 [13]，河合 [10]，金子 [9] 等を参照されたい．また，超函数とフーリエ超函数の場合には，対応の与える前層自体がすでに層になっており，付随する層をとる操作は省けた．

ベクトル値版　ベクトル値版の層も定義しよう．

E を $\mathbb{C}$ 上の列的完備な局所凸空間とし，${}^E\mathscr{O}$ を $\mathbb{C}$ 上の E-値正則函数の層とする．なお，列的完備な局所凸空間に値をとる正則函数については，Bochnak-Siciak [2] を参照されたい．このとき，${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ と ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}$ が同様に定義される．すなわち，

定義 2.3 (ベクトル値版の有界正則函数の層と有界超函数の層)．$\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ 上の E 値の有界正則函数の層 ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ を，次の対応

$$\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}\overset{\text{open}}{\supset}U\mapsto\{f\in{}^E\mathscr{O}(U\cap\mathbb{C});f\text{ は有界 }\}.$$

が与える前層に付随する層として定義し，また $\mathbb{D}^1$ 上の E 値の無限遠で有界な超函数の層 ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}$ を，次の対応

$$\mathbb{D}^1\overset{\text{open}}{\supset}\Omega\mapsto\varinjlim_{U}\frac{{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(U\setminus\Omega)}{{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(U)}.$$

が与える前層に付随する層として定義する．ここで，U はやはり Ω の複素近傍をわたる．

$\mathscr{O}_{L^\infty}$ の場合と同様に，${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ の U 上の切断の空間は次のように記述される．

$${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(U)=\{f\in {}^E\mathscr{O}(U\cap\mathbb{C});\forall K\Subset U,\forall q\in\mathcal{N}(E),\|f\|_{K,q}<+\infty\}.$$

ここで，$\mathcal{N}(E)$ は E の連続セミノルム系を表し，またセミノルム $\|\cdot\|_{K,q}$ は $\|f\|_{K,q}:=\sup_{w\in K\cap\mathbb{C}}|q(f(w))|$ で与えられる．そして，${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(U)$ はセミノルム系 $\{\|\cdot\|_{K,q}\}_{K\Subset U,q\in\mathcal{N}(E)}$ によって局所凸空間となる．

例 2.4. 興味を引く E としては，$\mathbb{C}^n$ の開集合 V 上の正則函数の空間 $\mathscr{O}(V)$ (Fréchet 空間) や，$\mathbb{R}^n$ の開集合 V 上の実解析函数の空間 $\mathscr{A}(V)$ (距離付け可能でない) などがある．

超函数の層の延長　スカラー値版 ($E=\mathbb{C}$) の場合，$\mathscr{B}_{L^\infty}$ は超函数の層 $\mathscr{B}$ の $\mathbb{D}^1$ への延長となっている．すなわち

$$\mathscr{B}_{L^\infty}|_{\mathbb{R}}=\mathscr{B}$$

が成り立つ．また，E が Fréchet 空間の場合，Ion-河合 [8] は一般次元の実解析的多様体上に E-値超函数の層 ${}^E\mathscr{B}$ を構成したが，我々の ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の場合の Ion-河合の層の，$\mathbb{D}^1$ への延長となっている．

これらのことから，この報告では，一般の場合に ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}$ の $\mathbb{R}$ への制限 ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}|_{\mathbb{R}}$ を ${}^E\mathscr{B}$ と表すことにする．ただし，E が Fréchet でない場合には，${}^E\mathscr{B}$ は超函数の層に期待されるいくつかの性質をみたすとは限らないことに注意する (例えば，後に見るように，$E=\mathscr{A}(V)$ のとき ${}^E\mathscr{B}$ は脆弱にならない．この方面の一般論としては，Domański-Langenbruch [5] を参照されたい)．

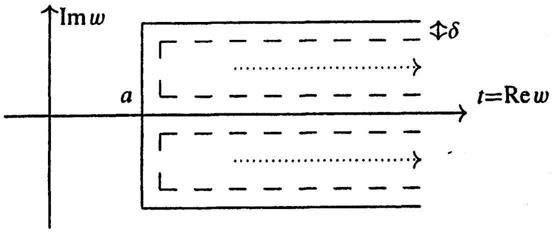
境界値表示　有界超函数は定義函数による境界値表示を持つ．

命題 2.5. ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}$ の，コンパクト集合 $[a,+\infty]$ 上の切断 u は，その内部 $]a,+\infty]$ において次の境界値表示を持つ:

$$u(t)=[f(w)]=f(t+i0)-f(t-i0),\ \text{on}\ ]a,+\infty].$$

ここで，f は ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ の $]a,+\infty]+i(]-d,d[\setminus\{0\})$ 上の切断であるが，これは，

f が $]a,+\infty[+i(]-d,d[\setminus\{0\})$ 上の E-値正則函数であって，また任意の $\delta>0$ に対して，集合 $\{t>a+\delta,\delta<|s|<d-\delta\}$ 上で有界であることを意味する．



有界な函数の埋め込み スカラー値の場合，次の自然な埋め込みが存在する．

$$L^{\infty}(]a,+\infty[)\hookrightarrow \mathscr{B}_{L^{\infty}}(]a,+\infty]).$$

また，一般には，有界連続写像 $f\colon]a,+\infty[\to E$ は ${}^{E}\mathscr{B}_{L^{\infty}}(]a,+\infty])$ の元とみなせる．

これらは，次の自然な写像 ${}^{E}\mathscr{O}_{L^{\infty}}|_{\mathbb{D}^1}\hookrightarrow {}^{E}\mathscr{B}_{L^{\infty}}$ と両立する．

他の性質 スカラー値版 $\mathscr{B}_{L^{\infty}}$ は脆弱層である．したがって特に，制限写像 $\mathscr{B}_{L^{\infty}}(]a,+\infty])\to \mathscr{B}(]a,+\infty[)$ は全射である．なお，この写像は単射ではない．すなわち無限遠に台をもつ非自明な切断が存在する．

フーリエ超函数の層 $\mathscr{Q}$ への標準的埋め込み $\mathscr{B}_{L^{\infty}}\to\mathscr{Q}$ が存在する．

§2.2. Chung-Kim-Lee の空間 $\mathcal{B}_{L^{\infty}}$

Chung-Kim-Lee による有界超函数の空間 $\mathcal{B}_{L^{\infty}}$ は，$\mathcal{A}_{L^1}$ の双対空間として定義されるが，このテスト函数の空間の定義は，

$$\mathcal{A}_{L^1}:=\varinjlim_{h>0}\{\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n);\sup_{\alpha}\frac{\|\partial^{\alpha}\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{h^{|\alpha|}\alpha!}<+\infty\}$$

で与えられる．

定理 2.6. 大域切断の空間 $\mathscr{B}_{L^{\infty}}(\mathbb{D}^1)$ は ($n=1$ の場合の) $\mathcal{B}_{L^{\infty}}$ と同一視される．

同一視は，小さな $s>0$ に対する

$$\mathcal{A}_{L^1}\times\mathscr{B}_{L^{\infty}}(\mathbb{D}^1)\ni(\varphi,[f])\mapsto\int_{\mathbb{R}}(\varphi(t+is)f(t+is)-\varphi(t-is)f(t-is))dt\in\mathbb{C}$$

で与えられる ($\mathcal{A}_{L^1}$ の元はある帯領域 $\{t+is;|s|<d\}$ まで正則に接続されて適当な増大度条件をみたす)．

§3. 作用素と周期性

ここでは，有界超函数に作用する (必ずしも層準同型ではない) 作用素を考え，また有界超函数や作用素の周期性について議論する．

§3.1. 制限と可換な作用素

type K の作用素 $K\subset\mathbb{R}$ を閉区間，$U\subset\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ を開集合とする．なお，ここでの閉区間 K とは，1 点のみからなる集合でもよいとする．一般に開集合 $V\subset\mathbb{C}$ に対して，和 $V+K$ は元の和の集合として定まって $\mathbb{C}$ の開集合となるが，V が $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ の開集合の場合にも和 $V+K$ の概念がうまく拡張でき，$\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ の開集合となる．

定義 3.1 (type K の作用素). U の各開集合 V に対して，連続線形写像

$$P_V\colon {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V+K) \to {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V)$$

が定まっているとする．これらが制限写像と可換であるとき，族 $P=\{P_V\colon {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V+K)\to {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V)\}_{V\subset U}$ を U 上の ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type K の作用素と言う．なお，制限写像と可換とは，任意の開集合の包含関係 $V_2 \subset V_1$ $(\subset U)$ に対して，縦が制限写像であるような次の図式が可換になることを言う．

$$\begin{array}{ccc}
{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V_1+K) & \xrightarrow{P_{V_1}} & {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V_1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V_2+K) & \xrightarrow{P_{V_2}} & {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V_2)
\end{array}$$

U 上の ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type K の作用素 P は，線形写像の族

$$\{P_\Omega\colon {}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\Omega+K)\to {}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\Omega)\}_{\Omega\subset\mathbb{D}^1\cap U},$$

を引き起こし，任意の $\Omega_2\subset\Omega_1$ $(\subset \mathbb{D}^1\cap U)$ に対して次の図式が可換となる．

$$\begin{array}{ccc}
{}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\Omega_1+K) & \xrightarrow{P_{\Omega_1}} & {}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\Omega_1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
{}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\Omega_2+K) & \xrightarrow{P_{\Omega_2}} & {}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\Omega_2)
\end{array}$$

無限遠での芽の解　P を U 上の ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type K の作用素とする．

$K=\{0\}$ の場合を考えよう．この場合，type $\{0\}$ の作用素 P とは，連続写像からなる ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}|_U$ の層準同型に他ならない．このとき，P は ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}|_{\mathbb{D}^1\cap U}$ の層準同型を引き起こす．したがって，$U\ni+\infty$ であれば，P は茎 $({}^E\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$ に作用する．だから，芽 $f\in({}^E\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$ に対して方程式 $Pu=f$ の $({}^E\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$-解という概念が意味をもつ．

一方，$K\neq\{0\}$ の場合には，P は ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}$ の層準同型とはならない．それでも，$U\ni+\infty$ のとき P は茎 $({}^E\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$ に作用する．だから，芽 $f\in({}^E\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$ に対して方程式 $Pu=f$ の $({}^E\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$-解を考えることができる．

§ 3.2.　type K の作用素の例

掛け算作用素　$U\subset\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ を開集合とする．

スカラー値 $(E=\mathbb{C})$ の場合をまず考えよう．$a\in\mathscr{O}_{L^\infty}(U)$ による掛け算作用素 $a\cdot$ は U 上の $\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type $\{0\}$ の作用素となる．

ベクトル値の場合には，2 つの列的完備な局所凸空間 E,F と，F から $\mathcal{L}_b(E)$ (E の連続線形作用素の空間に有界集合上一様収束の位相を入れたもの) への連続線形写像 $F\to\mathcal{L}_b(E)$ が 1 つ与えられているものとする．この写像 $F\to\mathcal{L}_b(E)$ を 1 つ固定して考えることに注意する．

$a\in{}^F\mathscr{O}_{L^\infty}(U)$ による“掛け算”は U 上の ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type $\{0\}$ の作用素を誘導する．

例 3.2. W を $\mathbb{C}^n$ の開集合とし $\mathbb{C}^n$ の座標として $z=(z_1,\dots,z_n)$ をとる．$E=\mathscr{O}(W)$ とし，$m\in\mathbb{N}$ を固定して，W 上の m 階以下の正則係数線形微分作用素の空間 を $F:=\mathscr{D}(W)[m]$ と定める．F は列的完備な局所凸空間となることに注意する．${}^F\mathscr{O}_{L^\infty}(U)$ の元とは，$a(w,z,\partial_z)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(w,z)\partial_z^\alpha$ という形の微分作用素で，各係数 $a_\alpha(w,z)\in\mathscr{O}((U\cap\mathbb{C}_w)\times W)$ は，任意のコンパクト集合 $K\times L\Subset U\times W$ に対して $(K\cap\mathbb{C})\times L$ 上で有界となっている．

微分作用素　微分作用素 $\partial_w:=d/dw$ は ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に連続写像からなる層準同型として働き，type $\{0\}$ の作用素となる．ここで，Cauchy の不等式が E 値の正則函数と E の任意の連続セミノルムに関しても成り立っていることに注意する．これが引き起こす ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}$ に対する層準同型を $\partial_t:=d/dt$ と表す．

E,F および $F\to\mathcal{L}_b(E)$ を掛け算作用素のところで導入した列的完備な局所凸空間および連続線形写像とするとき，

定義 3.3. $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ 上の，${}^F\mathscr{O}_{L^\infty}$ 係数の常微分作用素の層 ${}^F\mathscr{D}_{L^\infty}$ を，次の対応

$$\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}\overset{\text{open}}{\supset}U\mapsto\{P(w,\partial_w):=\sum_{j=0}^{m}a_j(w)\partial_w^j;m\in\mathbb{N},a_j\in{}^F\mathscr{O}_{L^\infty}(U)\}$$

が与える前層に付随する層として定める．

切断 $P\in{}^F\mathscr{D}_{L^\infty}(U)$ は U 上 ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type $\{0\}$ の作用素となる．

差分作用素

例 3.4. $\omega>0$ を定数とするとき，ω-平行移動 T_ω: $u(t)\mapsto u(t+\omega)$ は type $\{\omega\}$ の作用素であり，ω-差分 $T_\omega-1$: $u(t)\mapsto u(t+\omega)-u(t)$ は type $[0,\omega]$ の作用素である．

一般には，コンパクト台の超函数 $k(t)\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ に対して $-\operatorname{supp}k$ の凸包を K と書くと，合成積 $k*$ が $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ 上の ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type K の作用素を定める．

§3.3. 超函数，有界超函数および作用素の周期性

有界超函数の周期性　定数 $\omega>0$ は固定する．

定義 3.5 (ω-周期的な (有界) 超函数). $u\in{}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1)$ (あるいは $u\in{}^E\mathscr{B}(\mathbb{R})$) が ω-周期的とは $(T_\omega-1)u=0$ をみたすことと定める．

定理 3.6. 制限写像 ${}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1)\to{}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{R})$ が誘導する次の写像は同型である．

$$\{u\in{}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1);(T_\omega-1)u=0\}\to\{u\in{}^E\mathscr{B}(\mathbb{R});(T_\omega-1)u=0\}.$$

したがって，すべての E 値 ω-周期的超函数 $f\in{}^E\mathscr{B}(\mathbb{R})$ はただ 1 つの E 値 ω-周期的延長 $\hat{f}\in{}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1)$ をもつ．特に，無限遠のみに台をもつ周期有界超函数は自明なものしかない．

さらに，

定理 3.7. すべての ω-周期的有界超函数 $f\in{}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1)$ は ω-周期的境界値表示をもつ．すなわち，$g\in{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1+i\{s;0<|s|<d\})$ で $f=[g]$ かつ $(T_\omega-1)g=0$ となるものが存在する．

作用素の周期性　U を，開区間 I を切り口とする $\mathbb{D}^1+i\mathbb{R}$ 内の帯領域 $\mathbb{D}^1+iI$ とし，また，P は U 上の ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type K の作用素とする．

定義 3.8 (ω-周期的な作用素). P が ω-周期的とは，ω-平行移動作用素 T_ω との可換性で定義する．すなわち，P が ω-周期的とは，任意の $V\subset U$ に対して次の図式が可換になることである．

$$\begin{tikzcd}
{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V+\omega+K) \arrow[r, "P_{V+\omega}"] \arrow[d, "T_\omega"] & {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V+\omega) \arrow[d, "T_\omega"] \\
{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V+K) \arrow[r, "P_V"] & {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V)
\end{tikzcd}$$

ω-周期的作用素は作用される函数あるいは超函数の ω-周期性を保つ．

§4.　有界超函数に対する Massera 型定理

ここでは，主結果 1 および主結果 2 を紹介する．主結果 1 に関しては [12] を参照されたい．最近の結果 (主結果 2) やそれに関連する事柄については，現在準備中の論文にて詳細を記載するつもりである．

§4.1.　Montel 性

E を列的完備な局所凸空間とする．E が Montel property をもつとは，次の条件をみたすことと定める．

(M) E の任意の有界列が収束部分列をもつ．

Montel 型の補題

補題 4.1. 列的完備な局所凸空間 E が Montel property をもつならば，${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(U)$ の任意の有界列 $(f_j)_j$ に対して，部分列 $(f_{j_k})_k$ と切断 $f\in {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(U)$ が存在し，${}^E\mathscr{O}(U\cap\mathbb{C})$ の位相で $f_{j_k}\to f$ となる．

$(f_j)_j$ には ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(U)$ 内で収束する部分列は，必ずしも存在しない．

§4.2.　主結果 1

Massera 型の定理　$K\subset\mathbb{R}$ を (1 点かもしれない) 閉区間とし，ω, d は正定数とする．P は，帯領域 $\mathbb{D}^1+i]-d,d[$ 上の ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する ω-周期的な type K の作用素とする．さらに，$f\in {}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1)$ は ω-周期的な E 値超函数とするとき，ω-周期的な E 値の有界超函数に一意に延長されるので，その延長も同じ記号 f で表す．

定理 4.2. E が (M) をみたすとする．$Pu=f$ が ω-周期的な ${}^E\mathscr{B}(\mathbb{R})$-解をもつための必要十分条件は $({}^E\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$-解をもつことである．

E と作用素の例　E として $\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^m$ をとれば，もちろん Montel property をもつが，それ以外の例として，開集合 $V \subset \mathbb{R}^n_x$ 上の実解析函数の空間 (に通常の位相を入れたもの) $\mathscr{A}(V)$ をとってみよう．$\mathscr{A}(V)$ は Fréchet 空間ではない．また $q\colon \mathbb{R}\times V \to \mathbb{R}$ を第 1 射影とする．このとき，次が示せる．

命題 4.3. (1) $\mathscr{A}(V)$ は Montel property をもつ．
(2) 標準的な同型 ${}^{\mathscr{A}(V)}\mathscr{B} \xrightarrow{\sim} q_*\mathscr{B}\mathscr{A}$, ${}^{\mathscr{A}(V)}\mathscr{B}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}\mathscr{A}(\Omega\times V)$ $(\Omega\subset\mathbb{R})$ が存在する．
　ここで，$\mathscr{B}\mathscr{A}$ は $\mathbb{R}\times V$ 上の実解析パラメータ x をもつ超函数の層である．

なお，$\Omega_1 \supset \Omega_2$ に対して制限写像 $\mathscr{B}\mathscr{A}(\Omega_1\times V) \to \mathscr{B}\mathscr{A}(\Omega_2\times V)$ は一般に全射ではないので，層 ${}^{\mathscr{A}(V)}\mathscr{B}$ は脆弱でないことがわかる．

さらに，$\mathbb{R}\times V$ 上の偏微分作用素 $P(t,x,\partial_t,\partial_x) = \sum_{j,\alpha}^{\text{有限和}} a_{j,\alpha}(t,x)\partial_t^j\partial_x^\alpha$ について，次の 2 条件を課す．

- V のある複素近傍 $W \subset \mathbb{C}^n_z$ と正定数 d が存在して，すべての $a_{j,\alpha}$ は $(\mathbb{R}+i]-d,d[)\times W$ に正則に延長可能である (この延長を，$a_{j,\alpha}(w,z) \in \mathscr{O}((\mathbb{R}+i]-d,d[)\times W)$ と書く)．
- すべての $a_{j,\alpha}$ は t 変数に関して ω-周期的である．

このとき，P は $U := \mathbb{D}^1 + i]-d,d[$ 上の ${}^{\mathscr{A}(V)}\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する ω-周期的な type $\{0\}$ の作用素となる．

したがって，上記の P に対して，$f\in\mathscr{B}\mathscr{A}(\mathbb{R}\times V)$ が t 変数について ω-周期的のとき，定理 4.2 から次が導かれる．

系 4.4. $Pu = f$ に t 変数に関して ω-周期的な $\mathscr{B}\mathscr{A}(\mathbb{R}\times V)$-解があるための必要十分条件は，$({}^{\mathscr{A}(V)}\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$-解が存在することである．

§4.3. 無限遅れの作用素

type $K = [-\infty, b]$ の作用素　これまでは $\mathbb{R}$ 内の有界閉区間 K を考えてきたが，ここでは $b\in\mathbb{R}$ をひとつとり，$K = [-\infty,b]$ とする．開集合 $V\subset\mathbb{D}^1 + i\mathbb{R}$ に対して，有界閉区間の場合と同様に $V+K$ がうまく定義され，また開集合となる．

定義 4.5. 写像の族 $P = \{P_V\colon {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V+K) \to {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V)\}_{V\subset U}$ が $U\subset\mathbb{D}^1 + i\mathbb{R}$ 上の ${}^E\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type $K = [-\infty,b]$ の作用素であるとは，U 内の開集合 V に対して $P_V\colon {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V+K) \to {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V)$ が連続線形写像で，また $V_2\subset V_1$ $(\subset U)$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V_1+K) & \xrightarrow{P_{V_1}} & {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V_1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
{}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V_2+K) & \xrightarrow{P_{V_2}} & {}^E\mathscr{O}_{L^\infty}(V_2)
\end{array}$$

が可換となることをいう．

$K = [-\infty,b]$ の場合，type K の作用素 P はもはや $+\infty$ における茎には作用しない．

$$P\colon {}^E\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1) \to ({}^E\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$$

が well-defined なので，$f \in ({}^{E}\mathscr{B}_{L^\infty})_{+\infty}$，$u \in {}^{E}\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1)$ について $Pu = f$ が $+\infty$ における芽として成立するとき，u を "$Pu = f$ の $+\infty$ における ${}^{E}\mathscr{B}_{L^\infty}$-解" と呼ぶ．しかしこのとき，$u$ は $+\infty$ における芽ではなく大域切断であり，また f が $+\infty$ のある近傍 Ω で定義された ${}^{E}\mathscr{B}_{L^\infty}$ の切断であるとしても Pu と f は Ω 全体で一致するとは限らず，$+\infty$ の (一般にはより小さな) 近傍で一致するだけであることに注意する必要がある．

(FM) 条件をみたす type $[-\infty, b]$ の作用素　我々は，P にさらなる仮定を置く．これは，日野-村上-内藤 [7] で研究されている (uniform) fading memory space の概念に関連するものと考えられる．

定義 4.6 (FM). $P = \{P_V\}_{V \subset U}$ を $U \subset \mathbb{D}^1 + i\mathbb{R}$ 上の ${}^{E}\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type $[-\infty, b]$ の作用素とする．P が条件 (FM) をみたすとは，次を満たすことと定める．

$$\forall L \Subset \forall M \Subset \forall V \subset U, \forall p \in \mathcal{N}(E), \exists q = q_{L,M,p} \in \mathcal{N}(E),$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists K^0 = K^0_{L,M,p,\varepsilon} \Subset K \cap \mathbb{R}, \exists C = C_{L,M,p,\varepsilon} > 0,$$
$$\forall f \in {}^{E}\mathscr{O}_{L^\infty}(V + K), \|P_V(f)\|_{L,p} \le C\|f\|_{M+K^0,q} + \varepsilon\|f\|_{M+K,q}.$$

この報告では詳細を省くが，条件 (FM) をみたす作用素 P は，一般の作用素に比べ強い連続性をもつ．

§4.4.　主結果 2

(FM) をみたす方程式に対する主定理　$K = [-\infty, b]$ とし，ω, d を正の定数とする．また，P は $\mathbb{D}^1 + i]-d, d[$ 上の ${}^{E}\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する ω-周期的な type K の作用素で，$f \in {}^{E}\mathscr{B}_{L^\infty}(\mathbb{D}^1)$ は ω-周期的であるとする．

定理 4.7. E は Montel property (M) をみたし，P は (FM) をみたすものとする．このとき，$Pu = f$ が ω-周期的な ${}^{E}\mathscr{B}(\mathbb{R})$-解をもつことと，$+\infty$ における ${}^{E}\mathscr{B}_{L^\infty}$-解をもつこととは同値である．

(FM) をみたす作用素の例　条件 (FM) はわかりにくいが，Volterra 型積分作用素を典型例として含む．この報告では特に積分核が通常の函数となっているものについて，例示しよう．

d を正の数とし，$K := [-\infty, 0]$, $U := \mathbb{D}^1 + i]-d, d[$ とする．

例 4.8 (Volterra 型積分作用素). $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 内の開集合

$$(U \cap \mathbb{C}) \times (K \cap \mathbb{R}) = \{(w, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}; |\mathrm{Im}\, w| < d, s < 0\}$$

上で定義された連続函数 $K(w, s)$ は，次の条件をみたすものとする．

- 変数 w について正則かつ ω-周期的．
- $U \cap \mathbb{C} = \mathbb{R} + i]-d, d[$ 内の任意のコンパクト集合 L に対して，変数 s の函数 $s \mapsto \sup_{w \in L} |K(w, s)|$ が，$K \cap \mathbb{R} =]-\infty, 0]$ 上で可積分．

(第1の条件より K は w に関して ω-周期的だから,第2の条件における L としてはコンパクト集合ではなく $\mathbb{R}+i]-d',d'[$ $(0<d'<d)$ という部分帯領域の族をとっても構わない).

$V\subset U$ について,線形写像 $P_V\colon \mathscr{O}_{L^\infty}(V+K)\to\mathscr{O}_{L^\infty}(V)$ を, $f\in\mathscr{O}_{L^\infty}(V+K)$ に対して

$$P_V(f)(w)=\int_{-\infty}^{0}K(w,s)f(w+s)ds$$

によって定める.

すると, $P=\{P_V\}_{V\subset U}$ は, U 上 $\mathscr{O}_{L^\infty}$ に対する type K の作用素となり, (FM) をみたす.

参考文献

[1] 青木貴史,片岡清臣,山崎晋,超函数・FBI変換・無限階擬微分作用素,共立出版,2004.

[2] Bochnak, J. and Siciak, J., Analytic functions in topological vector spaces, *Studia Math.* **39** (1971), 77–112.

[3] Chow, S. N. and Hale, J. K., Strongly limit-compact maps, *Funkcial. Ekvac.* **17** (1974), 31–38.

[4] Chung, S.-Y., Kim, D. and Lee, E. G., Periodic hyperfunctions and Fourier series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 2421–2430.

[5] Domański, P. and Langenbruch, M., Vector valued hyperfunctions and boundary values of vector valued harmonic and holomorphic functions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), 1097–1142.

[6] Hino, Y. and Murakami, S., Periodic solutions of a linear Volterra system, Differential equations (Xanthi, 1987), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **118**, Dekker, New York, 1989, pp. 319–326.

[7] Hino, Y., Murakami, S. and Naito, T., Functional-differential equations with infinite delay, *Lecture Notes in Math.* **1473**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[8] Ion, P. D. F. and Kawai, T., Theory of vector-valued hyperfunctions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **11** (1975/76), 1–19.

[9] 金子晃,超函数入門(新版),東京大学出版会,1996.

[10] Kawai, T., On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math.* **17** (1970), 467–517.

[11] Massera, J. L., The existence of periodic solutions of systems of differential equations, *Duke Math. J.* **17** (1950), 457–475.

[12] Okada, Y., Massera criterion for linear functional equations in a framework of hyperfunctions, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **15** (2008), 15–51.

[13] 佐藤幹夫,超函数の理論,数学 **10** (1958), 1–27.

[14] Sato, M., Theory of hyperfunctions. I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect.* IA **8** (1959), 139–193.

[15] Sato, M., Theory of hyperfunctions. II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.* IA, **8** (1960), 387–437.

[16] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of André Martineau, Lecture Notes in Math. **287**, Springer, Berlin, 1973, pp. 265–529.

[17] Zubelevich, O., A note on theorem of Massera, *Regul. Chaotic Dyn.* **11** (2006), 475–481.